

**Univerzitet Crne Gore
Prirodno-matematički fakultet**

Džordža Vašingtona b.b.
1000 Podgorica, Crna Gora

tel: +382 (0)20 245 204
fax: +382 (0)20 245 204
www.pmf.ac.me

Broj: 732/1
Datum: 01.06. 2022 god

UNIVERZITET CRNE GORE
SENATU
CENTAR ZA DOKTORSKE STUDIJE

U prilogu akta dostavljam Odluku sa LXXIX sjednice Vijeća Prirodno-matematičkog fakulteta održane 29.03.2022. godine.



ze Dekan,
Prof. dr. Predrag Miranović



**Univerzitet Crne Gore
Prirodno-matematički fakultet**

Džordža Vašingtona b.b.
1000 Podgorica, Crna Gora

tel: +382 (0)20 245 204
fax: +382 (0)20 245 204
www.pmf.ac.me

Broj:

Datum:

724
11.03.2022.god

Na osnovu člana 64 Statuta Univerziteta Crne Gore a u vezi sa članom 35 stav 3 Pravila doktorskih studija, Izvještaja komisije za ocjenu polaznih istraživanja, na LXXIX sjednici Vijeća održanoj 29.03.2022.godine, Vijeće je donijelo

ODLUKU

I

Usvaja se Izvještaj komisije za ocjenu polaznih istraživanja kandidata MSc Antona Đokaja.

II

Odluka se dostavlja Centru za doktorske studije Univerziteta Crne Gore.



DEKAN

Prof. dr Predrag Miranović

OCJENA PODOBNOSTI DOKTORSKE TEZE I KANDIDATA

OPŠTI PODACI O DOKTORANDU	
Titula, ime i prezime	MSc Anton Gjokaj
Fakultet	Prirodno-matematički fakultet
Studijski program	Matematika
Broj indeksa	2/19
Podaci o magistarskom radu	„Konveksne i univalentne harmonijske funkcije u kompleksnoj ravni i njihova geometrija“ Matematička analiza, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, 2019, 10.00
NASLOV PREDLOŽENE TEME	
Na službenom jeziku	Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru
Na engleskom jeziku	Boundary behaviour of quasiconformal harmonic mappings in space
Datum prihvatanja teme i kandidata na sjednici Vijeća organizacione jedinice	24.12.2021.
Naučna oblast doktorske disertacije	Matematička analiza
Za navedenu oblast matični su sljedeći fakulteti	
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore	
A. IZVJEŠTAJ SA JAVNE ODBRANE POLAZNIH ISTRAŽIVANJA DOKTORSKE DISERTACIJE	
<p>MSc Anton Gjokaj pristupio je odbrani polaznih istraživanja sprovedenih u okviru izrade doktorske disertacije pod nazivom “Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru” dana 24.03.2022. godine u 10h, pred komisijom u sastavu:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Dr Đorđije Vujadinović, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore - Dr Marijan Marković, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore - Dr David Kalaj, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore (mentor) <p>Komisija je imenovana na sjednici Vijeća Prirodno-Matematičkog fakulteta, održanoj 24.12.2021. godine. Kandidat je precizno izložio osnovnu temu disertacije i dosadašnje rezultate na kojima se bazira istraživanje, kao i predstavio svoje rezultate i korištene metode. Komisija je zaključila da ovo istraživanje predstavlja doprinos oblasti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru. Komisija je, uzimajući u obzir kvalitet sprovedenih istraživanja i odgovore na postavljena pitanja, jednoglasno donijela odluku da je kandidat uspješno odbranio polazna istraživanja. Odbrana je završena u 10h i 55 minuta.</p>	

B. OCJENA PODOBNOSTI TEME DOKTORSKE DISERTACIJE
B1. Obrazloženje teme

Kvazikonformna preslikavanja u ravni su nastala kao prirodno uopštenje pojma konformnih preslikavanja. Danas je ova oblast aktivno područje istraživanja i srijeće se u parcijalnim diferencijalnim jednačinama, topologiji, dinamici i drugim oblastima. Finski matematičar O.Martio je prvi izučavao kvazikonformna harmonijska preslikavanja. Od tada problem Hölder i Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja između oblasti u ravni sa unaprijed zadatim svojstvima izazvao je veliko interesovanje matematičara. Međutim, osjetno manje ima analognih rezultata u prostoru ($u R^n$, za $n \geq 3$), naročito zbog nedostatka tehnika iz kompleksne analize (svako harmonijsko preslikavanje u ravni se može napisati kao zbir analitičke i antianaliitičke funkcije). Zato, za rješavanje odgovarajućih problema u prostoru je neophodno da se razviju nove pogodne tehnike. Sve to zajedno čini problem težim, ali eventualno rješavanje i odgovarajući pristup mogu biti korisni i za ostale probleme iz srodnih oblasti.

B2. Cilj i hipoteze

S obzirom na to da je kvazikonformnim preslikavanjima u prostoru posvećena manja pažnja u odnosu na slučaj ravni, prirodno se nameće potreba da se razvijaju nove tehnike kako bi se generalizovali i eventualno poboljšali neki poznati rezultati iz ravni u prostoru R^n , $n \geq 3$. Cilj istraživanja je ispitivanje Lipschitz i Hölder neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja između prostornih oblasti. To podrazumijeva određivanje potrebne glatкости na granici odgovarajućih oblasti kako bi preslikavanje bilo Lipschitz neprekidno, odnosno Hölder neprekidno.

Postavljene hipoteze su:

- 1) Kvazikonformno harmonijsko preslikavanje iz jedinične lopte u R^n na prostornu oblast Ω sa $C^{1,\alpha}$ granicom je Lipschitz neprekidno.
- 2) Kvazikonformno preslikavanje f iz β -Bloch harmonijskog prostora, $\beta \in (0,1)$, između jedinične lopte i prostorne oblasti sa C^1 granicom je α -Hölder neprekidno, $\alpha \in (0,1 - \beta)$, sa uniformnim Hölder koeficijentom koji ne zavisi ni od f , ni od β .
- 3) Kvazikonformno harmonijsko, Lipschitz neprekidno preslikavanje f između jedinične lopte i prostorne oblasti sa C^1 granicom je α -Hölder neprekidno, $\alpha \in (0,1)$, sa uniformnim Hölder koeficijentom koji ne zavisi od f .
- 4) Kvazikonformno preslikavanje f koje zadovoljava uslov $\Delta f = g$, gdje je $g \in L^p$, za $p > n$, iz jedinične lopte u R^n na prostornu oblast Ω sa $C^{1,\alpha}$ granicom je Lipschitz neprekidno.

Napomena: Rezultat hipoteze 1) je već ostvaren kroz autorski rad.

B3. Metode i plan istraživanja

Po geometrijskoj definiciji sa pojmom kvazikonformnog preslikavanja se podrazumijeva homeomorfizam $f : U \rightarrow V$ (U i V su oblasti u R^n) koji čuva orijentaciju i koji ostavlja kvaziinvarijantnim modul svake familije krivih iz G , tj. postoji konstanta $K \geq 1$ td.

$$\frac{1}{K}M(\Gamma) \leq M(f(\Gamma)) \leq KM(\Gamma),$$

za svaku familiju krivih Γ iz G . Napominjemo da je modul krivih invarijanta za konformna preslikavanja, što gorenavedenu definiciju čini prirodnom. Ispostavlja se da kvazikonformna preslikavanja možemo definisati i preko metričke definicije koja se zasniva na ograničenost dilatacije, čime se pokazuje da kvazikonformnost je lokalno svojstvo. U našim istraživanjima $f: U \rightarrow V$ je kvazikonformno preslikavanje ako je homeomorfizam koji je apsolutno neprekidan na linijama, i za koji postoji $K \geq 1$ tako da je

$$|f'(x)| \leq Kl(f'(x)), \text{ za } x \in U,$$

gdje je $|f'(x)| = \sup_{|h|=1} |f'(x)h|$ norma preslikavanja $f'(x)$, a $l(f'(x)) = \inf_{|h|=1} |f'(x)h|$.

Od velikog značaja za dokaz hipoteza kandidata jeste i jedna generalizacija u prostoru dobro poznate Hardy-Littlewood teoreme. Ovom generalizacijom, za harmonijsku funkciju $u: B \subset R^n \rightarrow R$, i $\eta \in S = \partial B$, se daje veza između μ -Hölder koeficijenta ($\mu < 1$) na S u odnosu na tačku η , tj.

$$X = \sup_{\xi \in S, \xi \neq \eta} \frac{|u(\eta) - u(\xi)|}{|\eta - \xi|^\mu}$$

i vrijednosti

$$Y = \sup_{x \in [0, \eta)} (1 - |x|)^{1-\mu} |\nabla u(x)|,$$

kroz sljedeću nejednakost:

$$\frac{1}{C}X \leq Y \leq CX,$$

gdje konstanta C zavisi samo od μ . Kandidat je dokaz izveo primijenom Poasonovog integrala. Naime, svaka funkcija $u: \bar{B} \subset R^n \rightarrow R$, gdje je u harmonijska u jediničnoj lopti B , a neprekidna u $\bar{B} = B \cup S$, se može zapisati u sljedećem obliku

$$u(x) = \int_S \frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|^n} u(\xi) d\sigma(\xi),$$

gdje je σ normalizovana površinska mjera na S .

Osim navedene generalizacije Hardy-Littlewood teoreme, kandidat dokazuje odgovarajuću verziju teoreme i u slučaju da je $\mu > 1$. Ako za fiksirano $\eta \in S$, imamo nejednakost

$$|u(\eta) - u(\xi)| \leq M|\eta - \xi|^\mu, \text{ za } \xi \in S,$$

onda važi $|\nabla u(x)| \leq C$, za x iz duži $[0, \eta)$, gdje je C konstanta koja zavisi samo od μ i M .

Kada je u pitanju Hölder neprekidnost kvazikonformnih preslikavanja iz jedinične lopte u jediničnu loptu, onda neizostavan je rezultat teoreme Mori u prostoru: K kvazikonformno sirjektivno preslikavanje $f: B \subset R^n \rightarrow B$, $f(0) = 0$, je α -Hölder neprekidno, gdje je $\alpha = K^{\frac{1}{1-n}}$, sa Hölder koeficijentom koji zavisi samo od K .

Za dokaz rezultata 1) korišćena je tehnika koja omogućava sukcesivno poboljšanje Hölder neprekidnosti u jediničnoj lopti B , imajući kao bazni slučaj β -Hölder neprekidnost koja se dobija primijenom Morijeve teoreme. Koristeći uslov $C^{1,\alpha}$ granice kodomena, granica kodomena se može lokalno predstaviti kao grafik $C^{1,\alpha}$ funkcije. To omogućava da u odnosu na jednu fiksiranu tačku n -ta koordinata funkcije f bude $(1 + \alpha)\beta$ -Hölder neprekidna u S , što na osnovu

generalizacije Hardy-Littlewood teoreme daje ograničenost vrijednosti Y . Koristeći kvazikonformnost preslikavanja f ta nejednakost se može dobiti i za ostale koordinate funkcije f , a koristeći pogodne izometrije nejednakost se prenosi i na sve ostale tačke iz jedinične lopte. Na taj način, generalizacija Hardy-Littlewood teorema daje $(1 + \alpha)\beta$ -Hölder neprekidnost početnog preslikavanja u čitavoj lopti (iz β -Hölder neprekidnosti se došlo do $(1 + \alpha)\beta$ -Hölder neprekidnosti). Sukcesivnom primijenom ovog postupka, zaključuje se da je f μ -Hölder neprekidno za sve $\mu \in (0,1)$. Prelazak iz Hölder neprekidnosti u Lipschitz neprekidnost kandidat ostvaruje na analogan način kao za preostale iteracije, osim što koristi verziju Hardy-Littlewood teoreme za slučaj $\mu > 1$.

Što se tiče hipoteze/problema 2) kandidat planira da parcijalno generalizuje rezultate iz ravni u prostoru. Dodatna pretpostavka, u odnosu na rezultate ostvarene u ravni je uslov β - Bloch prostora za preslikavanje f , za neko $\beta \in (0,1)$. Ideja se zasniva na posmatranje n -te kordinate funkcije f . Zbog uslova β -Bloch prostora ispostavlja se da funkcija

$$(1 - |x|)^{1-\alpha} |f'_n(x)|$$

uzima vrijednost nula na sferi S , pa se odgovarajući supremum dostiže u unutrašnjosti lopte B . To, na osnovu pomenutog uopštenja Hardy-Littlewood teoreme, povlači α -Hölder neprekidnost preslikavanja f_n , sa Hölder koeficijentom koji zavisi od navedenog supremuma. Odgovarajuće nejednakosti se prenose i na ostale koordinatne funkcije koristeći kvazikonformnost preslikavanja f . Očekuje se da, zbog kompaktnosti granice i kvazikonformnosti preslikavanja f , navedeni supremum može biti kontrolisan nezavisno od tačke iz lopte gdje se dostiže taj supremum/maksimum i nezavisno od preslikavanja f .


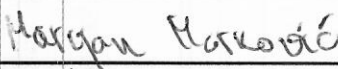
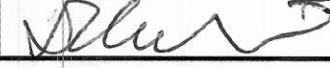
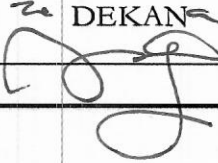
Za hipotezu/problem 4) uslov $\Delta f = g$, gdje je $g \in L^p$, kandidat će koristiti za reprezentaciju funkcije f preko Poasonovog jezgra i odgovarajuće Grinove funkcije. Očekuje se da dio koji je povezan sa Grinovom funkcije može biti "kontrolisan" i tako se uopštiti rezultate iz ravni gdje je uzet jači uslov (C^2 uslov na granici kodomena).

B4. Naučni doprinos

Kao što je naglašeno, ispitivanje Hölder i Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja je tema koja je imala dosta pažnje u slučaj ravni, međutim u prostoru je nedovoljno istražena. Dokaz pojedinih tvrđenja i u prostoru bi omogućilo ne samo generalizaciju rezultata iz ravni, već u nekim slučajevima i uopštenje i poboljšanje već postignutih rezultata. Kroz nove razvijene tehnike u prostoru odgovarajući pristup može biti koristan i za ostale slične probleme. Sa druge strane, u pojedinim situacijama se može ukazati i na suštinske razlike koje donosi prelaz iz ravni u prostor, zbog kojih se neka tvrđenja ne mogu generalizovati.

B5. Finansijska i organizaciona izvodljivost istraživanja

Mišljenje komisije je da kandidat uz sopstvene napore i podršku Prirodno-Matematičkog fakulteta može obrezbijediti odgovarajuće organizacione uslove za izradu ove doktorske disertacije.

Mišljenje i prijedlog komisije		
<p>Komisija za ocjenu podobnosti teme i rada kandidata, nakon detaljnog razmatranja prijave teme i javne prezentacije programa istraživanja, smatra da je predmet istraživanja kandidata matematički sadržajan, originalan, aktuelan i da odgovara nivou istraživanja za doktorsku disertaciju. Takođe, komisija je mišljenja da prezentovani novi rezultati predstavljaju doprinos u izučavanju kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru, što potvrđuje i publikovanje rada u časopisu Potential Analysis.</p> <p>Stoga komisija predlaže Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta da se podrži prijava disertacije kandidata MSc Antona Gjokaja.</p>		
Prijedlog izmjene naslova		
Prijedlog promjene mentora i/ili imenovanje drugog mentora		
Planirana odbrana doktorske disertacije		
2023, zimski semestar		
Izdvojeno mišljenje		
Napomena		
ZAKLJUČAK		
Predložena tema po svom sadržaju odgovara nivou doktorskih studija.	DA	NE
Tema je originalan naučno-istraživački rad koji odgovara međunarodnim kriterijumima kvaliteta disertacije.	DA	NE
Kandidat može na osnovu sopstvenog akademskog kvaliteta i stečenog znanja da uz adekvatno mentorsko vođenje realizuje postavljeni cilj i dokaže hipoteze.	DA	NE
Komisija za ocjenu podobnosti teme i kandidata		
Prof. dr Đordije Vujadinović, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora		
Prof. dr Marijan Marković, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora		
Prof. dr David Kalaj, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora		
U Podgorici, 28.03.2022.		
		 DEKAN



PRILOG

PITANJA KOMISIJE ZA OCJENU PODOBNOSTI DOKTORSKE TEZE I KANDIDATA	
Prof. dr Đorđije Vujadinović	Da li je uslov u definiciji kvazikonformnih preslikavanja u prostoru motivisan definicijom kvazikonformnih preslikavanja u ravni sa dilatacijama?
	Pojasniti strategiju korišćenja uslova Bloch prostora kod hipoteze 2.
	Koji bi bio suštinski problem da se uopšti rezultat hipoteze/rezultata 1 i na oblast sa Dini glatkom granicom (umjesto $C^{1,\alpha}$ granicom)?
	Obasniti korišćenje Morijeve teoreme.
Prof dr. Marijan Marković	Da li ste razmatrali uopštenje rezultata 1 za slučaj kada je i domen preslikavanja oblast sa $C^{1,\alpha}$ granicom?
	Zašto nije prirodno očekivati da važi rezultat 1 za slučaj kada je domen preslikavanja oblast sa C^1 granicom?
Prof. dr David Kalaj	Šta predstavlja $d\sigma$ kod Puasonovog integrala?
	Koja je veza između ACL (apsolutna neprekidnost po linijama) i diferencijabilnosti?
	Šta se može reći za co-Lipschitz neprekidnost u slučaju preslikavanja iz kruga u konveksnu oblast sa C^1 granicom?
	Mogućnost uopštenja tvrđenja na klasu pluriharmonijskih preslikavanja u prostoru.
PITANJA PUBLIKE DATA U PISANOJ FORMI	
ZNAČAJNI KOMENTARI	

Na osnovu člana 32 stav 1 tačka 14 Statuta Univerziteta Crne Gore, u vezi sa članom 34 Pravila doktorskih studija (Bilten br.513/20), Senat Univerziteta Crne Gore, u postupku razmatranja predloga Vijeća Prirodno-matematičkog fakulteta i na predlog Odbora za doktorske studije, na sjednici održanoj 09.03.2022. godine, donio je sljedeću

ODLUKU

I

Imenuje se Komisija za ocjenu prijave doktorske disertacije kandidata mr Antona Đokaja, u sastavu:

1. Dr Đorđije Vujadinović, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore
2. Dr Marijan Marković, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore
3. Dr David Kalaj, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore

II

Student je obavezan da pred komisijom za ocjenu prijave doktorske disertacije javno obrazloži ciljeve i očekivane rezultate, odnosno izloži istraživački program sa uslovima za uspješan završetak disertacije, u roku od 30 dana od dana imenovanja komisije.

Komisija je dužna da izvještaj koji sadrži ocjenu prijave doktorske disertacije dostavi Vijeću organizacione jedinice Univerziteta, u roku od 10 dana od dana javnog izlaganja studenta.

III

Odluka stupa na snagu danom donošenja.

Broj: 03-39/1

Podgorica, 09.03.2022. godine



PREDSJEDNIK SENATA

Prof. dr. Vladimir Božović, rektor